

부분적으로 $B_3(4)$ 수열을 포함하는
 $B_2(5)$ 수열을 이용한 QC-LDPC 부호 생성

김대경, 송홍엽

연세대학교

{daky33, hysong}@yonsei.ac.kr

Construction of QC-LDPC codes using
 $B_2(5)$ sequence whose subsequences are $B_3(4)$ sequence

Daekyeong Kim, Hong-Yeop Song

Yonsei Univ.

요약

본 논문은 부분적으로 $B_3(4)$ 수열을 포함하는 $B_2(5)$ 수열을 이용해 다양한 구조로 QC-LDPC 부호들을 생성 및 분석한다. 부호길이 232, 512로 부호를 생성하여 cycle 수를 확인하고, AWGN 채널에 대한 FER 성능을 시뮬레이션한다. 생성된 부호는 $B_3(5)$ 수열을 이용하는 경우보다 girth가 높은 것을 확인하였지만, 성능이 향상은 없는 것을 확인했다.

I. 서론

$B_3(m)$ 수열 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 은 $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ 을 만족하는 정수 수열로 m 개의 원소 중 중복을 허락하여 고른 3개의 원소의 합

$$a_i + a_j + a_k$$

들이 $i < j < k$ 에 대해 모두 다른 값을 갖는다는 성질로 정의된다[1]. $B_3(m)$ 수열 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 에 대해 $\{a_m - a_1, a_m - a_2, \dots, a_m - a_m\}$ 역시 $B_3(m)$ 수열이며 둘을 서로 mirror image라고 부른다. $B_3(m)$ 수열의 모든 원소에 일정한 정수를 더하여도 여전히 $B_3(m)$ 수열임을 쉽게 알 수 있다. 이를 이용하여 임의의 $B_3(m)$ 수열이 주어지면 항상 0으로 시작하는 $B_3(m)$ 수열 $\{a_1 = 0, a_2, \dots, a_m\}$ 으로 변환할 수 있다. $B_3(m)$ 수열의 길이 L 은

$$L = a_m - a_1$$

으로 정의되며, $\{0, 1, 15, 20, 23\}$ 은 길이 $L = 23$ 인 $B_3(m)$ 수열의 한 예시이다. $B_2(m)$, $B_4(m)$, $B_5(m)$, ... 수열에 대해서도 $B_3(m)$ 수열과 마찬가지로 정의된다. 이 때, 어떤 수열이 $B_{h+1}(m)$ 수열이면 $B_h(m)$ 수열이지만 반대는 일반적으로 성립하지 않는다. 예를들어 $\{0, 1, 4, 9, 11\}$ 은 $B_2(5)$ 수열이지만 아래와 같은 계산으로 $B_3(5)$ 수열이 아님을 쉽게 확인할 수 있다.

$$0 + 0 + 9 = 1 + 4 + 4$$

Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check (QC-LDPC) 부호는 quasi-cyclic 성질을 만족하는 LDPC 부호로 부호화 및 복호가 용이하기 때문에 다양한 무선통신 표준에서 오류정정부호로 사용되고 있다[2]. Girth는 LDPC 부호의 Tanner 그래프에 존재하는 사이클 중 최소 길이의 사이클을 의미한다. LDPC 부호의 Tanner 그래프에서 짧은 길이의 사이클들은 신뢰전파복호 성능을 저하시키므로 높은 girth를 갖도록 QC-LDPC 부호를 설계하는 연구가 진행되고 있다[3,4].

II. 본론

앞으로 논문에서 $B_2(m)$ 수열의 m 개의 원소 중 임의의 k 개의 원소들을 오름차순으로 나열하여도 $B_3(k)$ 수열이 되는 경우 이를 $B_3(m, k)$ 수열이라고 하자. Exhaustive search를 통해 0으로 시작하는 가장 짧은 $B_3(5, 4)$ 수열은 4개이며 길이는 $L = 19$ 임을 확인하였다. 아래에 찾은 $B_3(5, 4)$ 수열 4개를 보인다.

$$\{0, 1, 5, 16, 19\}, \{0, 3, 14, 15, 19\}, \{0, 3, 14, 18, 19\}, \{0, 4, 5, 16, 19\}$$

이 중 $\{0, 1, 5, 16, 19\}$ 와 $\{0, 3, 14, 18, 19\}$, 그리고 $\{0, 3, 14, 15, 19\}$ 와 $\{0, 4, 5, 16, 19\}$ 가 서로 mirror image이다.

$B_3(5, 4)$ 을 이용하여 다양한 구조로 QC-LDPC 부호를 정의하고 girth 및 성능을 확인하고자 한다. $P \times P$ 항등행렬을 오른쪽으로 한번 순환이 동시된 행렬을 ϕ 라고 하자. 오름차순 수열 $\{a_1 = 0, a_2, a_3, a_4, a_5 = L\}$ 에 대해 아래와 같은 3가지 구조의 행렬

$$\begin{bmatrix} \phi^{a_2} & \phi^{a_3} & \phi^{a_4} & \phi^{a_5} \\ \phi^{2a_2} & \phi^{2a_3} & \phi^{2a_4} & \phi^{2a_5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi^{a_2} & \phi^{a_3} & \phi^{a_4} & \phi^{a_5} \\ \phi^{2a_2} & \phi^{2a_3} + \phi^{3a_3} & \phi^{2a_4} & \phi^{2a_5} + \phi^{3a_5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi^{a_2} & \phi^{a_3} & \phi^{a_4} & \phi^{a_5} \\ \phi^{2a_2} + \phi^{3a_2} & \phi^{2a_3} + \phi^{3a_3} & \phi^{2a_4} + \phi^{3a_4} & \phi^{2a_5} + \phi^{3a_5} \end{bmatrix}$$

들을 각각 순서대로 (a), (b), (c) 라고 하자. 각각을 parity check 행렬로 하여 정의되는 부호는 길이 $n = 4P$ 인 QC-LDPC 부호이다. $P = 59, 128$ 에 대해 $B_3(5, 4)$ 수열 $\{0, 1, 5, 16, 19\}$ 을 이용해 (a), (b), (c)의 구조로 길이 $n = 232, 512$ 인 QC-LDPC 부호들을 정의하고, 비슷하게 $B_3(5)$ 수열 $\{0, 1, 15, 20, 23\}$ 에 대해서도 부호들을 정의하자. 표 1, 2, 3, 4는 각각 $P = 58, 128$ 에 대해 위와 같은 방식으로 생성한 QC-LDPC 부호들의 cycle 수를 나타낸다.

$P=58$ ($n=232$)	$B_3(5,4)$ 수열 {0,1,5,16,19}		
	(a)	(b)	(c)
4,6-cycle	0	0	0
8-cycle	0	232	2320
10-cycle	0	1508	15486
12-cycle	232	7737	140882

표 1 $B_3(5,4)$ 수열을 이용해 생성한 부호의 cycle 수 ($P=58$)

$P=58$ ($n=232$)	$B_3(5)$ 수열 {0,1,15,20,23}		
	(a)	(b)	(c)
4-cycle	0	0	0
6-cycle	0	0	58
8-cycle	0	319	2349
10-cycle	0	1392	13978
12-cycle	290	6670	143608

표 2 $B_3(5)$ 수열을 이용해 생성한 부호의 cycle 수 ($P=58$)

$P=128$ ($n=512$)	$B_3(5,4)$ 수열 {0,1,5,16,19}		
	(a)	(b)	(c)
4,6-cycle	0	0	0
8-cycle	0	512	4224
10-cycle	0	2432	20992
12-cycle	512	9984	199936

표 3 $B_3(5,4)$ 수열을 이용해 생성한 부호의 cycle 수 ($P=128$)

$P=128$ ($n=512$)	$B_3(5,4)$ $B_3(5)$ 수열 {0,1,15,20,23}		
	(a)	(b)	(c)
4,6-cycle	0	0	0
8-cycle	0	384	3328
10-cycle	0	1664	16384
12-cycle	512	8448	170304

표 4 $B_3(5)$ 수열을 이용해 생성한 부호의 cycle 수 ($P=128$)

$P=58$ ($n=232$)에 대해 $B_3(5,4)$ 수열을 이용한 경우에 $B_3(5)$ 수열을 이용하는 경우보다 전체적으로 더 적은 사이클을 갖는다. 반면 $P=128$ ($n=512$)에 대해서는 $B_3(5,4)$ 수열을 이용한 경우가 $B_3(5)$ 수열을 이용하는 경우보다 전체적으로 더 많은 사이클을 갖는다. (a), (b), (c) 구조로 갈수록 parity check 행렬에 1의 수가 증가해 사이클 수가 많아지는 것을 확인할 수 있다. $P=58$ ($n=232$)에 대해서 (c)의 구조로 부호를 생성할 때, $B_3(5,4)$ 수열을 이용한 경우 girth-8로 $B_3(5)$ 수열을 이용하는 경우의 girth-6보다 높은 girth를 갖는다.

생성한 부호들에 대해서 BPSK 변조를 가정하고 AWGN 채널에서의 복호 성능을 시뮬레이션을 통해 확인하였다. 복호에는 sum-product 알고리즘을 이용하였고 최대 10회까지 iteration 하였다. 전체적으로 (a), (b), (c)의 구조로 갈수록 parity check 행렬에서 1의 수가 증가하며 부호의 성능이 향상되었다. (c)의 구조로 부호를 생성할 때 $P=58$ ($n=232$)에서는 $B_3(5,4)$ 수열을 이용한 경우가 girth가 높음에도 불구하고 성능 차이는 없었고, $P=128$ ($n=512$)에서는 $B_3(5)$ 수열을 이용하는 경우가 사이클 수가 적으며 복호 성능이 좋은 것을 확인할 수 있다.

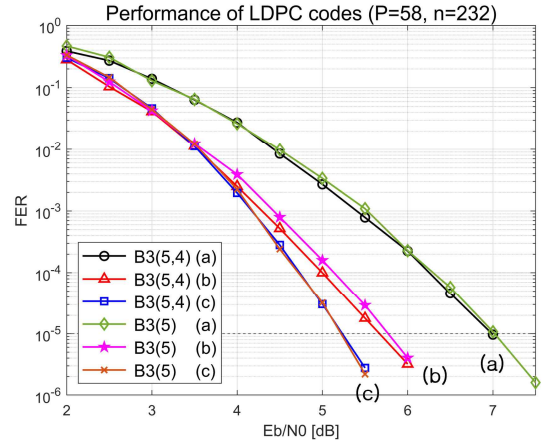


그림 1 생성된 부호들의 복호 성능 ($P=58, n=232$)

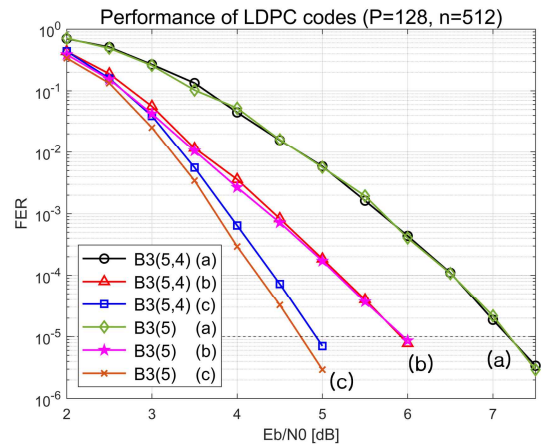


그림 2 생성된 부호들의 복호 성능 ($P=128, n=512$)

III. 결론

본 논문에서는 새롭게 $B_3(5,4)$ 수열을 정의하고 이를 이용해 다양한 구조로 QC-LDPC 부호를 생성하였다. 생성한 부호들에 대해 사이클 수를 비교하고 성능을 확인하였다. $B_3(5,4)$ 수열을 이용하여 짧은 부호길이에 대해 girth를 높였지만 성능 차이는 없었다. 추후 성능향상을 위해 QC-LDPC 부호의 구조 및 다양한 파라미터에 대한 분석이 필요하다.

ACKNOWLEDGMENT

이 (성파)는 정부(과학기술정보통신부)의 지원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No.RS-2023-00209000).

참고 문헌

- [1] A. W. Lam and X. Duan, "Optimal $B_h(n)$ sequences," *Electronics Letters*, 25(6), pp. 477 - 478, 1989.
- [2] 3GPP TS 38.212 v16.7.0 Release 16, NR; Multiplexing and Channel Coding, June 2020
- [3] I. Kim and H.-Y. Song, "A construction for girth-8 QC-LDPC codes using Golomb rulers," *Electronics Letters*, 58(15), 2022.
- [4] 김대경, 김원준, 송홍엽, "B3 수열을 이용한 간단한 구조의 Multi-Edge QC-LDPC 부호 생성 및 분석," 2023년 한국통신학회 하계종합학술발표회, 라마다프라자 제주호텔, 2023년 06월 21일-24일.